С учетом (2.3), (2.4) примет вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \pi_{10}\tilde{\gamma}_1 + \pi_{20}\tilde{\gamma}_2, \qquad (2.8)$$

а при подстановке (2.3) в (2.5), (2.6), (2.7) равенства превратятся в тождества.

Из всего вышеизложенного вытекает

**Теорема 2.** *При выполнении условий (2.2) процесс n(t) эргодичен. Для того, что бы его стационарное распределение представлялось в обобщенной форме произведения (2.3), необходимо выполнения равенства (2.8) и условий теоремы 1 для каждого из узлов.*

**Литература**

1. Miyazawa M., Taylor P.G. A Geometric Pro duct-form Distribution for a Queueing Network with Non-standard Batch Arrivals and Batch Transfers // Adv.Appl.Prob. 1997. V.29. No. 2. P.1-22.

2. Chao X. and Pinedo M. On Generalized Networks of Queues with Positive and Negative Arrivals // Prob. Eng. Inf. Sci. 1993. V.7. P.301-304.

3. Chao X., Pinedo M. and Shaw D. A Network of Assembly Queues with Product-form Solution // J. Appl. Prob. 1996. V.33. P.858-869.

УДК 519.6

## МЕТОД СЕКУЩИХ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

***Костюк А.Ю.***
*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест*
*Научный руководитель В.М.Ракецкий, к.ф.-м.н, доцент*

**Введение.** Методы минимизации функций одной переменной занимают важное место в теории и практике численных методов оптимизации, поскольку они часто используются при разработке методов минимизации функций n переменных. Наиболее популярными из них являются прямые методы (или нулевого порядка), не требующие вычисления производных.

Главное требование, которое предъявляется к прямым методам, можно сформулировать так: достичь заданную точность отыскания точки экстремума при минимальном количестве вычислений функции. Именно эта идея лежит в основе широко известных методов Фибоначчи, “золотого” сечения и квадратичной интерполяции [1,2]. Методы Фибоначчи и “золотого” сечения не предполагают и не требуют от функции никаких дополнительных свойств, кроме свойства унимодальности на заданном отрезке. Они одинаково хороши как для дифференцируемых, так и не дифференцируемых функций. Метод квадратичной интерполяции разработан из предположения, что минимизируемая функция является гладкой, хотя бы один раз дифференцируемой, однако его применение во многих случаях дает хорошие результаты и для недифференцируемых функций.

Ниже приводится описание прямого метода минимизации функции одной переменной, который получил условное название метода секущих, и результаты численного эксперимента по его сравнению с другими аналогичными методами.

**Идея метода**. Если функция *f(x)* унимодальна на отрезке *[a,b]*, то, зная внутри этого отрезка две точки $x_1$, $x_2$ и значения функции в них, можно уменьшить отрезок локализации экстремума, отбросив его часть, заведомо не содержащую точку минимума:

*[a,$x_1$]*, если *f($x_1$)<f($x_2$)*, или *[$x_2$,b]*, если *f($x_1$)<f($x_2$)*. Этот принцип так или иначе используется во всех методах минимизации унимодальных функций. Однако кроме значений функции в точках $x_1$, $x_2$ обычно известны и значения функции на концах отрезка *a, b*. С помощью информации о четырех точках можно получить новую информацию. Для этого соединим (см. рис. 1) точки (*a,f(a)*), (*$x_1$,f($x_1$)*) и (*$x_1$,f($x_1$)*), (*b,f(b)*) прямыми.

Левая прямая есть линейная аппроксимация левой ветви функции, правая – правой, а абсцисса точки пересечения прямых – приближение к точке минимума. Если ситуация сложится именно так, как показано на рисунке, то после нахождения пятой точки можно от отрезка *[a,b]* сразу перейти к отрезку *[$x_1$, $x_2$]*. Кроме этого можно контролировать процесс минимизации по двум последовательно найденным приближениям: если $x^{*1}$ и $x^{*2}$ – два последовательно найденных приближения к точке минимума, то $x^{*2}$ принимаем в качестве точки экстремума, если $|x^{*1} - x^{*2}| \le e$, где *e* – заданная точность отыскания экстремума.

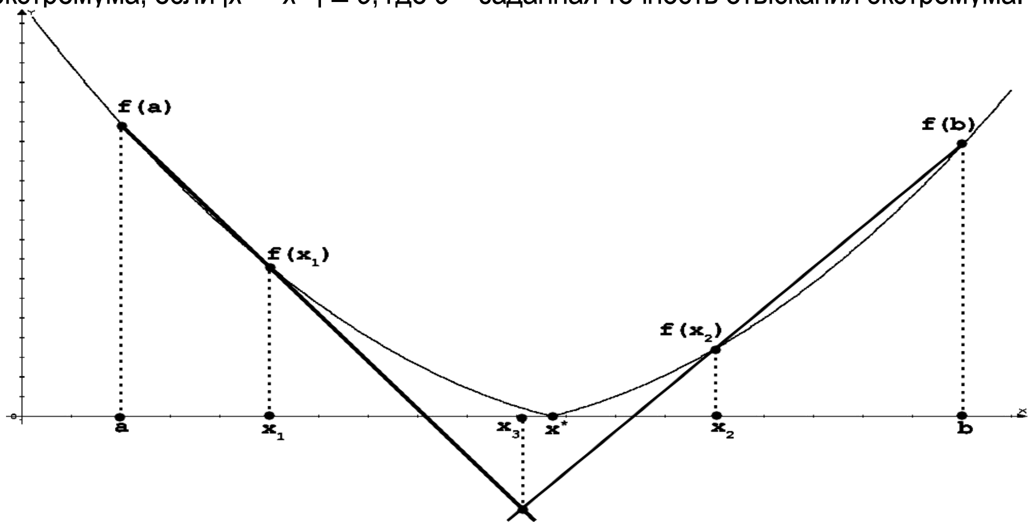


***Рисунок 1 – Графическая интерпретация метода секущих***

Никаких предположений о поведении функции *f(x)* на отрезке *[a,b]*, кроме унимодальности, не высказывалось. Поэтому этот метод приемлем для поиска минимума любых унимодальных функций. Однако характер аппроксимации подсказывает, что метод должен давать хорошие результаты для негладких функций и особенно для функций, которые близки по своему поведению к линейным негладким функциям типа $|x - x^*|$.

**Описание метода**. Обсудим сначала, как располагать точки $x_1$, $x_2$ внутри исходного отрезка *[a,b]*. Из последующего описания будет видно, что какого-то регулярного, заранее предопределенного размещения точек внутри отрезка локализации экстремума, как это есть в методах Фибоначчи или "золотого" сечения, сконструировать не удастся. Поэтому первоначальное размещение точек в принципе может быть любым, лишь бы точки $x_1$, $x_2$ не совпадали друг с другом. Предлагаются два способа:

1) точки $x_1$, $x_2$ располагаются равномерно на отрезке *[a,b]* и делят его на 3 равные части;

2) сначала в середине отрезка *[a,b]* располагается точка $x_1$. Точка $x_2$ помещается в середину одного из двух получившихся отрезков в зависимости от соотношения значений функции на концах отрезка *[a,b]*. Если *f(a)<f(b)*, то $x_2$ - середина отрезка *[a,$x_1$]*; при *f(a)>f(b)* точка $x_2$ – середина отрезка *[$x_1$,b]*.

Оба способа допускают дополнительный анализ: после построения точки $x_1$ можно проанализировать соотношение между значениями *f(a), f($x_1$)* и *f(b)*. Если *f(a)<f($x_1$)<f(b)*, то в силу унимодальности функции точка экстремума $x^* \in [a,x_1]$. В случае *f(a)>f($x_1$)> f(b)* точка минимума $x^* \in [x_1,b]$. В этих случаях можно сразу, без построения точки $x_2$, уменьшить отрезок локализации экстремума.

Рассмотрим теперь общую конструкцию метода. Как следует из его идеи, для метода секущих типичной является схема, когда от отрезка *[a,b]* происходит переход к отрезку $[a^1, b^1]=[x_1, x_2]$. Внутри последнего остается точка, в которой пересекаются секущие (для определенности, обозначим ее $x_1^1$). Эту точку, по аналогии с другими методами, необходимо использовать в дальнейших вычислениях. Возникает вопрос: как в этом случае выбрать вторую точку $x_2^1$ внутри отрезка $[a^1, b^1]$? Один из вариантов – симметрично точке $x_1^1$ относительно середины отрезка $[a_1, b_1]$. Однако расположение точки $x_1^1$ внутри отрезка $[a^1, b^1]$ не предсказуемо и при симметричном расположении точки $x_2^1$ нельзя гарантировать, что следующий отрезок $[a^2, b^2]$ будет существенно короче отрезка $[a^1, b^1]$. Поэтому точку $x_2^1$ предлагается располагать в середине большего из отрезков $[a_1, x_2^1]$, $[x_2^1, b^1]$. В этом случае следующий отрезок будет более чем в два раза короче предыдущего (если переход от $[a^1, b^1]$ к $[a^2, b^2]$ произойдет по типичной схеме).

Рассуждения предыдущего абзаца основывались на типичной схеме. Но она не является единственной. В процессе вычислений возможна нетипичная схема №1, когда точка пересечения секущих не принадлежит отрезку $[x_1, x_2]$. В этом случае, для упрощения анализа, перенумеруем три внутренних точки таким образом, чтобы выполнялось соотношение $x_1<x_2<x_3$. После этого новый отрезок строится по одному из 3-х правил:

1) $[a^1, b^1]=[x_1,x_3]$, если $f(x_2)<\min\{f(x_1),f(x_3)\}$;
2) $[a^1, b^1]=[a,x_1]$, если $f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)$;
3) $[a^1, b^1]=[x_3,b]$, если $f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)$.

Наконец, возможна нетипичная схема №2, когда точка пересечения секущих совпадает в пределах заданной точности с одной из точек $x_1$, $x_2$ или вообще не принадлежит отрезку *[a,b]*. В этом случае новый отрезок строится классическим способом (для упрощения считаем, что $x_1<x_2$):

1) $[a^1, b^1]=[a,x_1]$, если $f(x_1)<f(x_2)$;
2) $[a^1, b^1]=[x_2,b]$, если $f(x_1)>f(x_2)$.

С целью упрощения при анализе описанных выше ситуаций сознательно не рассматривались соотношения ≤, ≥. Для описания общей схемы метода они не имеют принципиального значения.

В заключение описания метода приведем формулы для вычисления абсциссы точки пересечения секущих (обозначим ее как $x_s$):

$$x_s = \frac{B_2(x_2,b)-B_1(a,x_1)}{A_1(a,x_1)-A_2(x_2,b)},$$

где $A_1(a,x_1)=\dfrac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}$; $A_2(x_2,b)=\dfrac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}$; $B_1(a,x_1)=\dfrac{-x_1f(a)+af(x_1)}{a-x_1}$;

$$B_2(x_2,b)=\frac{-bf(x_2)+x_2f(b)}{x_2-b}.$$

**Численный эксперимент.** Для проверки эффективности метода секущих был проведен численный эксперимент, в котором метод секущих сравнивался по количеству итераций и вычислений функции с методами “золотого” сечения и квадратичной интерполяции. При этом реализован был алгоритм, в котором точки $x_1$, $x_2$ для начального отрезка строились по правилу 2 с дополнительным анализом значения в точке $x_1$.

Негладкие функции:

| Функции | [a; b] | Количество вычислений функции | | |
|---|---|---|---|---|
| | | “Золотое сечение” | Метод секущих | Квадратичной интерполяции |
| 1. $F(x)=\|x-\pi\|$ | [3;4] | 20 | 8 | 14 |
| | [0;4] | 22 | 8 | 14 |
| 2. $F(x)=\|x^2-\pi^2\|$ | [3;4] | 20 | 12 | 16 |
| | [0;4] | 22 | 19 | 19 |
| 3. $F(x)=\begin{cases}\pi^2-x^2, если. x\le\pi \\ x-\pi, если. x>\pi\end{cases}$ | [3;4] | 20 | 10 | 28 |
| | [0;4] | 22 | 12 | 30 |
| 4. $F(x)=\|x-\pi\|+0.1(x-\pi)^2$ | [3;4] | 20 | 12 | 13 |
| | [0;4] | 22 | 16 | 17 |

Гладкие функции:

| Функции | [a; b] | Количество вычислений функции | | |
|---|---|---|---|---|
| | | “Золотое сечение” | Метод секущих | Квадратичной интерполяции |
| 1. $F(x)=x+\dfrac{1}{x}$ | [0.5;7] | 24 | 33 | 22 |
| | [0.9;6] | 23 | 33 | 13 |
| 2. $F(x)=\dfrac{x-5}{4x^2-25x+40}$ | [1;4] | 22 | 29 | 11 |
| | [3;6] | 22 | 28 | 11 |

Численный эксперимент подтверждает предположение о том, что для негладких функций метод секущих будет более эффективен, чем для гладких. Особенно он эффективен для функций, близких к линейным негладким функциям.

**Литература**

1. Габасов, Р.Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллов – Минск: Изд-во БГУ, 1981.

2. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау – М: Мир, 1975.

УДК 519.24

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ ОСРЕДНЕННОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

***Кулак Т.Н.***

*УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест*

*Научный руководитель - Мирская Е.И., кандидат физ.-мат. наук, доцент*

Рассмотрим r-мерный стационарный случайный процесс $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z$, $a=\overline{1,r}$, с $MX(t)=0$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$,, $\lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$,, $a,b=\overline{1,r}$.

$$f_{ab}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-\infty}^{\infty}R_{ab}(t)e^{-i\lambda t}. \qquad (1)$$

Пусть $X_a(0),X_a(1),..,X_a(T-1)$ - $T$ последовательных наблюдений за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t\in Z$, $a=\overline{1,r}$ и $T=LN-(L-1)K$, где $L$ - число пересекающихся интервалов, содержащих по $N$ наблюдений, а $K$ принимает целочисленные значения, $0\le K\le N$.